LVI OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

PRUEBA DE SELECCIÓN

PRIMER DÍA (11/05/15)

EN TODOS LOS PROBLEMAS, LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

1. Beto trata de adivinar un entero positivo *n*. Sabe que tiene exactamente 250 divisores enteros positivos distintos $1 = d_1 < d_2 < d_3 < ... < d_{248} < d_{249} < d_{250} = n$. Por turnos, pregunta por un índice *j* a su elección, $2 \leq j \leq 249$, y recibe como respuesta el número d_j. En el caso de que ya haya preguntado *j*, tiene prohibido preguntar $251 - j$. Determinar el menor número de turnos con los que Beto puede determinar con certeza el número *n*.

2. Sean *A*, *B*, *C*, *D* cuatro puntos de una circunferencia, en ese orden, con $AD > BC$. Las rectas *AB* y *CD* se cortan en *K*. Se sabe que los puntos *B*, *D* y los puntos medios de los segmentos *AC* y *KC* pertenecen a una misma circunferencia. Determinar todos los posibles valores del ángulo ADC.

3. Hallar todas las funciones que satisfacen

$$f(xy-1) + f(x)f(y) = 2xy - 1$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

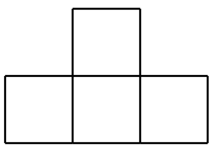
LVI OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
PRUEBA DE SELECCIÓN
SEGUNDO DÍA (12/05/15)

EN TODOS LOS PROBLEMAS, LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

4. Diremos que un conjunto de cuadrados cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados y cuyos vértices tienen coordenadas enteras es *amigable* si, para cada dos de los cuadrados, sus perímetros se cortan en exactamente dos puntos. Determinar la máxima cantidad de cuadrados que puede tener un conjunto amigable en el que todos los cuadrados tienen lado n (n entero mayor o igual que 1).

5. Hallar todos los enteros n que no son potencias de 2 y que satisfacen la ecuación $n = 3D + 5d$, donde D el mayor divisor impar de n y d es el menor divisor impar de n mayor que 1.

6. a) Se tiene un tablero cuadrado de 6×6 dividido en 36 casillas. Determinar si es posible cubrir este tablero con tetraminós como los de la figura (cada casilla del tablero se debe cubrir con el mismo número de tetraminós).



b) Se tiene un tablero cuadrado de 7×7 dividido en 49 casillas. Determinar si es posible cubrir este tablero con tetraminós como los de la figura (cada casilla del tablero se debe cubrir con el mismo número de tetraminós).

ACLARACIÓN: Los lados de cada tetraminó deben coincidir con lados de las casillas; los tetraminós se pueden rotar y dar vuelta, pero no pueden sobresalir del tablero.